面向广义空间调制的增强型交叉Z互补集的新构造

彭秀平[1,2]，刘银娜[1,2]，王毓[1,2]，牛晓霞[1]
（1.燕山大学信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004；2.河北省信息传输与信号处理重点实验室，河北 秦皇岛 066004）

摘　要：为了扩展增强型交叉Z互补集（E-CZCS）的存在空间，基于扩展广义布尔函数（EGBF），提出了一种增强型交叉Z互补集的直接构造方法。构造的q元增强型交叉Z互补集拥有灵活可变的尺寸大小，且长度不再受限于传统的2的幂次。同时，将得到的增强型交叉Z互补集作为训练序列应用于广义空间调制（GSM）系统的信道估计中。仿真结果表明，该增强型交叉Z互补集可以实现最优的信道估计，这可为广义空间调制系统中训练序列的选择提供更高的灵活性。

关键词：广义空间调制；信道估计；增强型交叉Z互补集；扩展广义布尔函数
中图分类号：TN911.2
文献标志码：A
DOI：10.11959/j.issn.1000–436x.2024271

New construction of enhanced cross Z-complementary set for generalized spatial modulation

PENG Xiuping[1,2], LIU Yinna[1,2], WANG Yu[1,2], NIU Xiaoxia[1]
1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China
2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: In order to expand the existence space of enhanced cross Z-complementary set (E-CZCS), based on the extended generalized Boolean function (EGBF), the direct construction method of enhanced cross Z-complementary sets was proposed. The constructed q-ary E-CZCS had flexible and variable size, and their length was no longer limited to the traditional power of two. At the same time, the obtained enhanced cross Z-complementary sets was used as the training sequence of the generalized spatial modulation (GSM) system for channel estimation. The simulation results show that the enhanced cross Z-complementary sets can achieve optimal channel estimation. This presumably provides greater flexibility in the selection of training sequences in generalized spatial modulation systems.

Keywords: generalized spatial modulation, channel estimation, enhanced cross Z-complementary set, extended generalized Boolean function

0　引言

近年来，广义空间调制（GSM, generalized spatial modulation）[1-4]作为一种前沿的无线通信数据传输技术，已经引起了通信学术界的广泛关注。这一项技术为无线通信系统提供了一种高效、灵活且可靠的调制方式，极大地推动了无线通信技术的发展。广义空间调制技术充分利用空域信息，不仅提高了系统的能量效率，还优化了频谱资源的利用率。作为一种先进的多输入多输出技术，广义空间调制系统在平坦衰落信道上展现出了零干扰、硬件

收稿日期：2024–07–19；**修回日期：**2024–11–25
通信作者：彭秀平，pengxp@ysu.edu.cn
基金项目：中央引导地方科技发展基金资助项目（No.236Z0403G）；河北省自然科学基金资助项目（No.E2024203225）；河北省重点实验基金资助项目（No.202250701010046）
Foundation Items： The Central Government Guides Local Science and Technology Development Foundation (No. 236Z0403G), The Natural Science Foundation of Hebei Province (No.E2024203225), Hebei Key Laboratory Project (No.202250701010046)

复杂度低、能耗低等诸多优势。空间调制[5-6]中仅需要单个射频链，并且每个时隙只激活一个发射天线。与空间调制技术不同，广义空间调制技术在每一发送时隙能够同时激活多根天线，形成多个天线组合来传输数据。这一特点使广义空间调制在保留空间调制优点的同时，在频谱效率、传输速率、射频链成本等方面实现了更加卓越的性能[7-9]。然而，对于在频率选择性信道中使用的广义空间调制系统而言，高效的信道估计方案是其性能进一步提升的关键。目前，这一领域尚且缺乏足够有效的解决方案，成为限制广义空间调制系统性能进一步提升的重要因素。随着研究的深入，交叉Z互补对[10-11]、交叉Z互补集[12]等的出现为解决这一难题提供了新的思路。

文献[11]提出了一种交叉Z互补对及其互补配对的构造方案，并且基于所提交叉Z互补对及其互补配对，提出了一种新的广义空间调制系统的训练框架，以在频率选择性信道中实现最小均方误差（MSE, mean square error）的信道估计性能。结果表明，文献[11]所提基于交叉Z互补对及其互补配对的广义空间调制系统在延迟扩展不大于训练序列的零相关区宽度时，可以消除符号间干扰和天线间干扰。但基于交叉Z互补对及其互补配对的训练框架只在每个时隙激活2个天线，不能满足更多发射天线同时激活的应用场景。

为了寻找其他可以应用到广义空间调制系统中的训练序列，文献[13]引入了对称Z互补码集的概念，并提出了基于广义布尔函数的最优对称Z互补码集的构造方法，该方法基于广义布尔函数构造的对称Z互补码集包含8个序列集，每个序列集包含2条序列，序列长度为2^m，零相关区宽度为$2^{m-2}+1$。同时，文献[13]提出了一个使用稀疏矩阵的广义空间调制训练框架，并证明了对称Z互补码集可以用作最佳广义空间调制训练设计框架。然而，文献[13]中提出的广义空间调制训练框架由于零填充而产生了额外的天线间干扰，这导致该方法训练效率降低。

在此基础上，文献[14]引入了增强型交叉Z互补集（E-CZCS, enhanced cross Z-complementary set），每个增强型交叉Z互补集由多个交叉Z互补集组成，且任意2个不同的交叉Z互补集都有一个尾端零相关区。文献[14]提出了两种增强型交叉Z互补集的构造方法，一种是基于包含有M个序列集、集内有N条序列，每条序列长度为L，零相关区宽度为Z的互补码集所构造的包含有M个序列集、集内有N条序列，每条序列长度为$2L$，零相关区宽度为$Z+1$的增强型交叉Z互补集，即$(M,N,2L,Z+1)$-增强型交叉Z互补集。另一种是基于广义布尔函数构造的$(2^k,2^v,2^m,2^{\pi_1(1)-1})$-增强型交叉Z互补集的方法。此外，文献[14]提出了一种针对宽带广义空间调制系统的新型训练框架，该框架充分利用了增强型交叉Z互补集的优异性能，可以在频率选择信道上实现最优信道估计，消除了天线间干扰和码间干扰。这一应用为增强型交叉Z互补集在通信系统的实际应用提供了有力的支持。

在实际应用中，灵活的训练序列长度可以提高系统的可行性[15]。值得注意的是，现有增强型交叉Z互补集的构造方法[14]生成的训练序列长度限制为2的幂次形式。这种局限性阻碍了增强型交叉Z互补集在序列长度多样化需求场景中的应用潜力。考虑到增强型交叉Z互补集具有出色的相关特性，且能够在广义空间调制系统中达到最优的信道估计性能。受此启发，本文提出了具有非2的幂次形式序列长度的增强型交叉Z互补集的构造方法，对于拓宽其应用范围和提高系统性能具有重要意义。本文主要的贡献总结如下。

1) 基于扩展广义布尔函数（EGBF, extended generalized Boolean function），提出了具有新的集合尺寸的直接构造方法，构造得到的增强型交叉Z互补集的序列集个数、集内序列条数和序列长度都可以是非2的幂次形式。

2) 将所提增强型交叉Z互补集应用于广义空间调制系统的信道估计中。仿真结果表明，基于所提增强型交叉Z互补集生成的广义空间调制训练方案优于其他对比序列的方案，并且可以实现最小信道估计均方误差。

1 基本概念

1.1 符号说明

首先，本文定义了一些贯穿全文的符号。

1) $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q}}$表示单位的$q$次方根。

2) $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_{L-1})$表示长度为$L$的训练序列。

3) $\mathbb{Z}_q=\{0,1,\cdots,q-1\}$表示以$q$为模的整数环，

且$\mathbb{Z}_q^* = \mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$。

4) $\mathbb{N}_t = \{1,2,\cdots,t\}$表示从1到$t$的正整数集合。

5) $b|q$表示q可以被b整除。

6) $\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}$和$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$分别表示矩阵$\boldsymbol{X}$的转置及共轭转置。

7) $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X})$表示矩阵$\boldsymbol{X}$的迹。

8) $\boldsymbol{X}^{(L)}$表示矩阵$\boldsymbol{X}$按行循环右移L个元素所得。

9) $\lceil a \rceil$表示大于或等于a的最小整数。

10) $\mathcal{U}(b) \triangleq \{t: \gcd(b,t) = 1$，其中$t \in \{1,2,\cdots,b-1\}\}$。

1.2　相关定义

定义 1[16]　设$\boldsymbol{g}$和$\boldsymbol{h}$是$\mathbb{Z}_q$上长度为L的序列，则序列$\boldsymbol{g}$和$\boldsymbol{h}$的非周期互相关函数的定义式为

$$R(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h};\tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{L-1-\tau} \omega_q^{g_{k+\tau}-h_k}, 0 \leqslant \tau \leqslant L-1 \\ \sum_{k=0}^{L-1+\tau} \omega_q^{g_k-h_{k-\tau}}, -L+1 \leqslant \tau < 0 \end{cases} \tag{1}$$

当$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$时，$R(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h};\tau)$为序列$\boldsymbol{g}$的非周期互相关函数，可以简写为$R(\boldsymbol{g};\tau)$。

定义 2[17]　设$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{d}$是$\mathbb{Z}_q$上长度为L的序列，则序列$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{d}$的周期互相关函数的定义式为

$$\varphi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d};\tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{L-1} \omega_q^{b_{(k+\tau)\bmod L}-d_k}, 0 \leqslant \tau \leqslant L-1 \\ \sum_{k=0}^{L-1} \omega_q^{b_k-d_{(k-\tau)\bmod L}}, -L+1 \leqslant \tau < 0 \end{cases} \tag{2}$$

当$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$时，$\varphi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d};\tau)$为序列$\boldsymbol{b}$的周期互相关函数，可以简写为$\varphi(\boldsymbol{b};\tau)$。

定义 3[14]　对于一个由M个序列集构成的集合$\mathcal{G} = \{G^0,G^1,\cdots,G^{M-1}\}$，每个序列集$G^m = \{\boldsymbol{g}_0^m, \boldsymbol{g}_1^m,\cdots,\boldsymbol{g}_{N-1}^m\}$由长度为$L$的$N$个序列组成，其中$0 \leqslant m \leqslant M-1$。令$\Gamma = \{1,2,\cdots,L-1\}$、$\Gamma_1 = \{1,2,\cdots,Z\}$和$\Gamma_2 = \{L-Z,L-Z+1,\cdots,L-1\}$。若任意2个序列集$G^{m_1}$和$G^{m_2}$满足

$$R(G^{m_1},G^{m_2};\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} R(\boldsymbol{g}_n^{m_1},\boldsymbol{g}_n^{m_2};\tau) = \begin{cases} 0, |\tau| \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \Gamma, 0 \leqslant m_1 = m_2 \leqslant M-1 \\ 0, |\tau| \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}, 0 \leqslant m_1 \neq m_2 \leqslant M-1 \end{cases} \tag{3}$$

当$|\tau| \in \Gamma_2$时，有

$$R^{\#}(G^{m_1},G^{m_2};\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} R(\boldsymbol{g}_n^{m_1},\boldsymbol{g}_{(n+1)\bmod N}^{m_2};\tau) = 0 \tag{4}$$

则称$\mathcal{G}$为(M,N,L,Z)-增强型交叉Z互补集，其中，Z为零相关区宽度。

定义 4[18]　令$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_m) \in \mathbb{Z}_b^m$，扩展广义布尔函数$f(x)$定义为从$\mathbb{Z}_b^m$到$\mathbb{Z}_q$的映射$f$。给定$f(x)$，$f = (f_0,f_1,\cdots,f_{b^m-1})$，其中$f_i = f(i_1,i_2,\cdots,i_m)$。$(i_1,i_2,\cdots,i_m)$是整数$i = \sum_{j=1}^{m} i_j b^{j-1}$的$b$进制表示向量。特别地，当$b = q$时，扩展广义布尔函数$f:\mathbb{Z}_q^m \to \mathbb{Z}_q$称为扩展布尔函数。当$b = 2$时，扩展广义布尔函数$f:\mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_q$称为广义布尔函数。

2　广义空间调制系统

2.1　传输结构

考虑一种频率选择信道上的单载波广义空间调制系统，该系统具有N_t个发射天线和N_a个射频链，同时需要一个$N_a \times N_t$交换机将射频链连接到发射天线。一种单载波广义空间调制系统的通用发射机结构如图1所示。

在每个发送时隙k，N_a个发射天线被激活，其余$N_t - N_a$个发射天线保持非激活状态。传输的信息比特用$\boldsymbol{b}_k = (\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{c}_k)$表示，其中$\boldsymbol{z}_k$信息比特表示用于选择发射天线的激活模式，$\boldsymbol{c}_k$信息比特表示传输的具体信

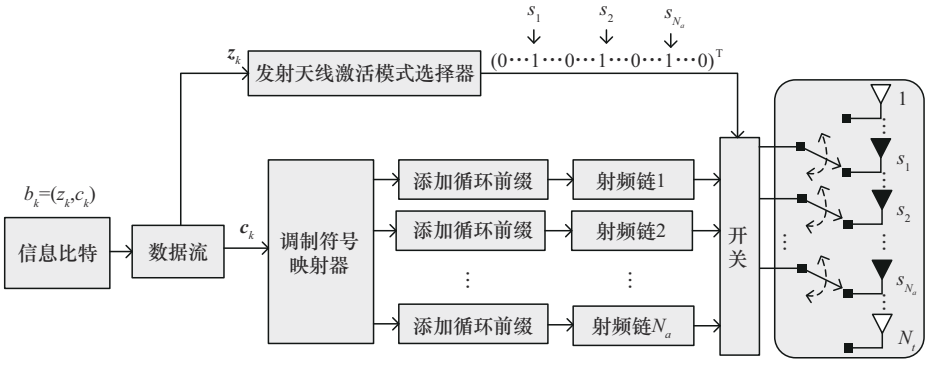


图1　单载波广义空间调制系统的通用发射机结构

号。用一个$N_t \times 1$的向量矩阵$\boldsymbol{s} = (0\cdots1\cdots0\cdots1\cdots0)^{\mathrm{T}}$作为激活天线的激活模式触发条件，向量矩阵为1的位置表示对应的天线处于激活状态，为0的位置表示对应的天线处于未激活状态。

图2展示了一种基于训练的通用单载波多输入多输出传输结构。在每个发射天线中，每个块都被分为两部分，一是训练序列，二是数据有效载荷。在数据有效载荷传输之前，从N_t个发射天线发送的训练序列$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{N_t}$中选择用于估计信道状态的信息。

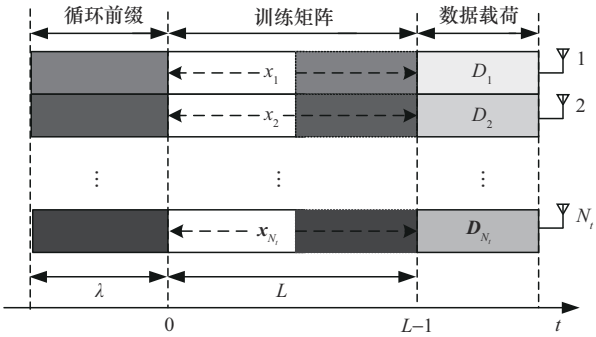


图2　基于训练的通用单载波多输入多输出传输结构

对于一个准静态频率选择性信道，第n个发射天线到接收器的信道冲激响应表示为$\boldsymbol{h}_n = [h_{n,0}, h_{n,1},\cdots,h_{n,\lambda}]^{\mathrm{T}}$，即长度为$\lambda+1$的离散向量，其中$h_{n,m}(0 \leqslant m \leqslant \lambda)$表示第$m$条路径的信道系数，$\lambda$表示准静态频率选择性信道的延迟扩展。假设$\boldsymbol{x}_n = [x_{n,0},x_{n,1},\cdots,x_{n,L-1}]$是通过第$n$个发射天线传输的训练序列，其中$1 \leqslant n \leqslant N_t$，则训练矩阵为

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{N_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,L-1} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N_t,0} & x_{N_t,1} & \cdots & x_{N_t,L-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

令所有的训练序列具有相同的能量E，即

$$\sum_{l=0}^{L-1} |x_{n,l}|^2 = E, 1 \leqslant n \leqslant N_t \tag{6}$$

在每个训练序列之前插入循环前缀，用于在色散信道中抑制符号间干扰。在接收天线处接收到的第k个信号表示为

$$y_k = \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{l=0}^{\lambda} h_{n,l} x_{n,k-l} + \omega_k \tag{7}$$

其中，ω_k表示一个离散不相关、均值为零、方差为$\frac{\sigma_\omega^2}{2}$的复高斯白噪声样本。

为了方便理论分析，将模型表示为如式(8)~式(12)所示矩阵形式。

$$\boldsymbol{X}_n = \begin{bmatrix} x_{n,0} & x_{n,L-1} & \cdots & x_{n,L-\lambda} \\ x_{n,1} & x_{n,0} & \cdots & x_{n,L-\lambda+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,L-1} & x_{n,L-2} & \cdots & x_{n,L-\lambda-1} \end{bmatrix}_{L\times(\lambda+1)} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \boldsymbol{h}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{N_t} \end{bmatrix}_{N_t(\lambda+1)\times 1} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{y} = [y_0,y_2,\cdots,y_{L-1}]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{N_t}]_{L\times(N_t\lambda+N_t)} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{w} = [w_0,w_2,\cdots,w_{L-1}]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

因此，可以得到

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{w} \tag{13}$$

用无偏最小二乘信道估计器，得到的估计信道冲激响应向量为

$$\hat{\boldsymbol{h}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} \tag{14}$$

归一化的均方误差可以推导为

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N_t\lambda+N_t}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}\left\{\left(\hat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}\right)\left(\boldsymbol{h}-\hat{\boldsymbol{h}}\right)^{\mathrm{H}}\right\}\right) = \frac{\sigma_w^2}{N_t\lambda+N_t}\mathrm{Tr}\left(\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right) \tag{15}$$

式(15)表明，当且仅当$\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}$是一个对角线元素完全相同的对角矩阵时，有

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_j = \begin{cases} EI_{\lambda+1}, i=j \\ \boldsymbol{0}_{(\lambda+1)\times(\lambda+1)}, i\neq j \end{cases} \tag{16}$$

当且仅当式(16)成立时，才能实现最小的均方误差，其中，$I_{\lambda+1}$表示大小为$\lambda+1$的单位矩阵。由式(16)可得

$$\phi(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j;\tau) = \begin{cases} E,\ i=j,\tau=0 \\ 0,\ i\neq j, 0\leqslant\tau\leqslant\lambda \\ 0,\ i=j, 1\leqslant\tau\leqslant\lambda \end{cases} \tag{17}$$

结合式(2)易知，当训练矩阵任意两行的周期相关函数的零相关区宽度大于或等于λ时，即可以实现最小的均方误差。由式(15)可得，最小均方误差为

$$\text{minimun MSE} = \frac{\sigma_w^2}{E} \tag{18}$$

2.2　训练矩阵

为了使用于广义空间调制系统的训练矩阵$\boldsymbol{\Psi}$可以在具有延迟扩展λ的频率选择性信道上实现最优信道估计，训练矩阵$\boldsymbol{\Psi}$需要满足式(17)。文献[14]提出了一种基于增强型交叉Z互补集的广义空间调

制系统的训练框架。同时，证明了通过充分利用增强型交叉Z互补集的相关性质，所提出的训练矩阵可以在频率选择性信道中实现最优信道估计性能。下面简要介绍该训练框架。

对于正整数N_t和N_a，令$V=\left\lceil \frac{N_t}{N_a} \right\rceil$，$\boldsymbol{\Psi}_1,\boldsymbol{\Psi}_2,\cdots,\boldsymbol{\Psi}_V$表示训练块，具体如式(19)所示。

$$\boldsymbol{\Psi}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_{N_a}\end{bmatrix},\boldsymbol{\Psi}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{N_a+1}\\ \boldsymbol{x}_{N_a+2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_{2N_a}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\Psi}_V=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{(V-1)N_a+1}\\ \boldsymbol{x}_{(V-1)N_a+2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_{VN_a}\end{bmatrix} \tag{19}$$

对于一个由M个序列集构成的，每个序列集由长度为L的N个序列组成的，零相关区宽度为Z的增强型交叉Z互补集$\mathcal{G}$，其中$M\geqslant N_a$。$\boldsymbol{Y}_0,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{N-1}$表示尺寸为$N_a\times VL$的训练子块，如式(20)所示。

$$\boldsymbol{Y}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_0^0 & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\\ \boldsymbol{g}_0^1 & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{g}_0^{N_a-1} & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_1^0 & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\\ \boldsymbol{g}_1^1 & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{g}_1^{N_a-1} & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{Y}_{N-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_{N-1}^0 & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\\ \boldsymbol{g}_{N-1}^1 & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{g}_{N-1}^{N_a-1} & \boldsymbol{0}_L & \cdots & \boldsymbol{0}_L\end{bmatrix} \tag{20}$$

其中，对于$0\leqslant p\leqslant N_a-1$，$G^P=\{\boldsymbol{g}_0^p,\boldsymbol{g}_1^p,\cdots,\boldsymbol{g}_{N-1}^p\}$表示$\mathcal{G}$中的$N_a$个序列集，$\boldsymbol{0}_L$表示长度为$L$的全零向量。此时，可得到$VN_a\times NVL$的广义空间调制训练矩阵$(N_t,N_a,V,N,L)$ - $\boldsymbol{\Psi}$为

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_1\\ \boldsymbol{\Psi}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Psi}_V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{Y}_1 & \cdots & \boldsymbol{Y}_{N-1}\\ \boldsymbol{Y}_0^{(L)} & \boldsymbol{Y}_1^{(L)} & \cdots & \boldsymbol{Y}_{N-1}^{(L)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{Y}_0^{((V-1)L)} & \boldsymbol{Y}_1^{((V-1)L)} & \cdots & \boldsymbol{Y}_{N-1}^{((V-1)L)}\end{bmatrix} \tag{21}$$

需要注意的是，当$N_t<VN_a$时，选择$\boldsymbol{\Psi}$的前N_t行作为N_t个发射天线的训练序列。此时，训练矩阵任意两行的周期互相关函数的零相关区宽度与增强型交叉Z互补集的零相关区宽度一致。

3　增强型交叉Z互补集的一般构造

为了提高基于增强型交叉Z互补集的广义空间调制系统的训练框架的可行性，并在频率选择性信道中实现最优信道估计性能。本节将提出一种基于扩展广义布尔函数得到增强型交叉Z互补集的直接构造方法，该方法得到的增强型交叉Z互补集参数不再受限于2的幂次形式，可以生成集合大小灵活可变以及大零相关区宽度的序列集。在此之前，首先给出引理1，这对定理1的证明非常重要。

引理1[19]　对于非负整数m和k，其中$k\leqslant m$，设非空集合$I_1,I_2,\cdots,I_k$是集合$\{1,2,\cdots,m\}$的一个划分。同时，令m_α为I_α的阶数，并且对于$\alpha=1,2,\cdots,k$，π_α是从$\{1,2,\cdots,m_\alpha\}$到I_α的一个映射。将扩展广义布尔函数f定义为

$$f=\frac{q}{b}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{m_\alpha-1}d_{\alpha,\beta}x_{\pi_\alpha(\beta)}x_{\pi_\alpha(\beta+1)}+\sum_{\mu=1}^{m}p_\mu x_\mu+p_0 \tag{22}$$

其中，$x_\mu\in\mathbb{Z}_b,b|q,d_l\in\mathcal{U}(b)$且$p_\mu,p_0\in\mathbb{Z}_q$。令

$$g_n^r=f+\frac{q}{b}\sum_{\alpha=1}^{k}n_\alpha x_{\pi_\alpha(1)}+\frac{q}{b}\sum_{\alpha=1}^{k}r_\alpha x_{\pi_\alpha(m_\alpha)} \tag{23}$$

则有$\mathcal{G}=\{G^0,G^1,\cdots,G^{b^k-1}\}$是一个$(b^k,b^m)$-完全互补码，其中$(n_1,n_2,\cdots,n_k)$和$(r_1,r_2,\cdots,r_k)$分别是$n$和$r$的$b$元表示。

定理1　有非负整数m,k,v和正整数b,q，其中$v\leqslant k$，$b\geqslant 2$。设非空集合$I_1,I_2,\cdots,I_k$是集合$\{1,2,\cdots,m\}$的一个划分。m_α为I_α的阶数，π_α是从$\{1,2,\cdots,m_\alpha\}$到I_α的一个映射，其中$\alpha=1,2,\cdots,k$。扩展广义布尔函数f定义为

$$f=\frac{q}{b}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{m_\alpha-1}d_{\alpha,\beta}x_{\pi_\alpha(\beta)}x_{\pi_\alpha(\beta+1)}+\sum_{\mu=1}^{m}p_\mu x_\mu+p_0 \tag{24}$$

其中，$x_\mu\in\mathbb{Z}_b,b|q,d_{\alpha,\beta}\in\mathcal{U}(b)$，$p_\mu,p_0\in\mathbb{Z}_q$。若$v<k$，令$\pi_{v+\eta}(1)=m-\eta+1$，且$\eta=1,2,\cdots,k-v$。当$r=0,1,\cdots,b^k-1$时，有

$$G^r=\{\omega^{g_0^r},\omega^{g_1^r},\cdots,\omega^{g_{b^v-1}^r}\} \tag{25}$$

令$(n_1,n_2,\cdots,n_v)$和$(r_1,r_2,\cdots,r_k)$分别是n和r的q元表示，当$n=0,1,\cdots,b^v-1$时，若有

$$g_n^r=f+\frac{q}{b}\left(\sum_{\alpha=1}^{k}n_{v-\alpha+1}x_{\pi_\alpha(1)}+\sum_{\alpha=1}^{k}r_\alpha x_{\pi_\alpha(m_\alpha)}\right) \tag{26}$$

则　$\mathcal{G}=\{G^0,G^1,\cdots,G^{b^k-1}\}$　是　$(b^k,b^v,b^m,(b-1)b^{\pi_1(1)-1})$-增强型交叉Z互补集。

证明详见附录1。

例1　令$q=b=3$，$k=2$，$m=3$，$v=1$，将

集合$\{1,2,3\}$划分为$I_1=\{1,2\}$和$I_2=\{3\}$，同时令$\pi_1=(2,1)$、$\pi_2=3$和$d_{1,1}=1$，扩展广义布尔函数为$f=x_2x_1$。根据上面给出的已知条件，可以得到集合$\mathcal{G}=\{G^r=\{\omega^{\boldsymbol{g}_0^r},\omega^{\boldsymbol{g}_1^r},\omega^{\boldsymbol{g}_2^r}\}:r\in\{0,1,\cdots,8\}\}$，生成的序列具体值如表1所示。

表1　　例1中生成的序列具体值

序列集	集内序列
G^0	$\boldsymbol{g}_0^0=(0,0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1)$
	$\boldsymbol{g}_1^0=(0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1,0)$
	$\boldsymbol{g}_2^0=(0,0,0,2,0,1,1,0,2,0,0,0,2,0,1,1,0,2,0,0,0,2,0,1,1,0,2)$
G^1	$\boldsymbol{g}_0^1=(0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0)$
	$\boldsymbol{g}_1^1=(0,1,2,1,0,2,2,2,2,0,1,2,1,0,2,2,2,2,0,1,2,1,0,2,2,2,2)$
	$\boldsymbol{g}_2^1=(0,1,2,2,1,0,1,1,1,0,1,2,2,1,0,1,1,1,0,1,2,2,1,0,1,1,1)$
G^2	$\boldsymbol{g}_0^2=(0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2,0,2,1,0,0,0,0,1,2)$
	$\boldsymbol{g}_1^2=(0,2,1,1,1,1,2,0,1,0,2,1,1,1,1,2,0,1,0,2,1,1,1,1,2,0,1)$
	$\boldsymbol{g}_2^2=(0,2,1,2,2,2,1,2,0,0,2,1,2,2,2,1,2,0,0,2,1,2,2,2,1,2,0)$
G^3	$\boldsymbol{g}_0^3=(0,0,0,0,1,2,0,2,1,1,1,1,1,2,0,1,0,2,2,2,2,2,0,1,2,1,0)$
	$\boldsymbol{g}_1^3=(0,0,0,1,2,0,2,1,0,1,1,1,2,0,1,0,2,1,2,2,2,0,1,2,1,0,2)$
	$\boldsymbol{g}_2^3=(0,0,0,2,0,1,1,0,2,1,1,1,0,1,2,2,1,0,2,2,2,1,2,0,0,2,1)$
G^4	$\boldsymbol{g}_0^4=(0,1,2,0,2,1,0,0,0,1,2,0,1,0,2,1,1,1,2,0,1,2,1,0,2,2,2)$
	$\boldsymbol{g}_1^4=(0,1,2,1,0,2,2,2,2,1,2,0,2,1,0,0,0,0,2,0,1,0,2,1,1,1,1)$
	$\boldsymbol{g}_2^4=(0,1,2,2,1,0,1,1,1,1,2,0,0,2,1,2,2,2,2,0,1,1,0,2,0,0,0)$
G^5	$\boldsymbol{g}_0^5=(0,0,0,0,1,2,0,2,1,2,2,2,2,0,1,2,1,0,1,1,1,1,2,0,1,0,2)$
	$\boldsymbol{g}_1^5=(0,0,0,1,2,0,2,1,0,2,2,2,0,1,2,1,0,2,1,1,1,2,0,1,0,2,1)$
	$\boldsymbol{g}_2^5=(0,0,0,2,0,1,1,0,2,2,2,2,1,2,0,0,2,1,1,1,1,0,1,2,2,1,0)$
G^6	$\boldsymbol{g}_0^6=(0,1,2,0,2,1,0,0,0,2,0,1,2,1,0,2,2,2,1,2,0,1,0,2,1,1,1)$
	$\boldsymbol{g}_1^6=(0,1,2,1,0,2,2,2,2,2,0,1,0,2,1,1,1,1,1,2,0,2,1,0,0,0,0)$
	$\boldsymbol{g}_2^6=(0,1,2,2,1,0,1,1,1,2,0,1,1,0,2,0,0,0,1,2,0,0,2,1,2,2,2)$
G^7	$\boldsymbol{g}_0^7=(0,2,1,0,0,0,0,1,2,2,1,0,2,2,2,2,0,1,1,0,2,1,1,1,1,2,0)$
	$\boldsymbol{g}_1^7=(0,2,1,1,1,1,2,0,1,2,1,0,0,0,0,1,2,0,1,0,2,2,2,2,0,1,2)$
	$\boldsymbol{g}_2^7=(0,2,1,2,2,2,1,2,0,2,1,0,1,1,1,0,1,2,1,0,2,0,0,0,2,0,1)$
G^8	$\boldsymbol{g}_0^8=(0,2,1,0,0,0,0,1,2,2,1,0,2,2,2,2,0,1,1,0,2,1,1,1,1,2,0)$
	$\boldsymbol{g}_1^8=(0,2,1,1,1,1,2,0,1,2,1,0,0,0,0,1,2,0,1,0,2,2,2,2,0,1,2)$
	$\boldsymbol{g}_2^8=(0,2,1,2,2,2,1,2,0,2,1,0,1,1,1,0,1,2,1,0,2,0,0,0,2,0,1)$

通过计算可知，得到的序列集$\mathcal{G}$是(9,3,27,6)−增强型交叉Z互补集。由于序列集个数较多，生成序列对应的相关函数在这里只列举$R(G^1;\tau)$、$R(G^5;\tau)$、$R(G^1,G^5;\tau)$和$R^{\#}(G^1,G^5;\tau)$，具体的数值如下。

$$\left|R(G^1;\tau)\right|_{\tau=0}^{26}=(81,\mathbf{0}_8,54,\mathbf{0}_8,27,\mathbf{0}_8)$$

$$\left|R(G^5;\tau)\right|_{\tau=0}^{26}=(81,\mathbf{0}_8,54,\mathbf{0}_8,27,\mathbf{0}_8)$$

$$\left|R(G^1,G^5;\tau)\right|_{\tau=0}^{26}=(\mathbf{0}_{27})$$

$$\left|R^{\#}(G^1,G^5;\tau)\right|_{\tau=0}^{26}=(\mathbf{0}_8,9,0,0,9,\mathbf{0}_5,9,0,0,9,\mathbf{0}_6)$$

4　对比分析

4.1　训练序列集参数对比

表2列出了目前可应用于广义空间调制系统的交叉Z互补对及其互补配对、对称Z互补码集及增强型交叉Z互补集与本文得到的增强型交叉Z互补集性能参数的参数对比情况。与文献[11]、文献[13]和文献[14]相比，目前可应用于广义空间调制系统的训练序列无论是序列集个数、集内序列条数还是序列长度，都必须遵循2的幂次形式，而本文所提基于扩展广义布尔函数的构造方法突破了这一限制，从而解决了文献[14]中的开放难题，其序列集个数、集内序列条数和序列长度可以为b的幂次形式，其中$b\geq 2$。这使得本文所提增强型交叉Z互补集的参数更加灵活可变，极大地扩展了可应用于广义空间调制系统的训练序列形式。

4.2　信道估计性能分析

对于一个发射天线个数$N_t=6$，射频链的个数$N_a=3$的广义空间调制系统，则$V=\left\lceil\dfrac{N_t}{N_a}\right\rceil=2$。应用例1中的(9,3,27,6)−增强型交叉Z互补集来生成(6,3,2,3,27)-$\boldsymbol{\Psi}$广义空间调制系统的训练矩阵。基于本文提出的(9,3,27,6)−增强型交叉Z互补集的广义空间调制训练矩阵如式(27)所示。

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_0^0 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_1^0 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_2^0 & \mathbf{0}_{27}\\ \boldsymbol{g}_0^1 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_1^1 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_2^1 & \mathbf{0}_{27}\\ \boldsymbol{g}_0^2 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_1^2 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_2^2 & \mathbf{0}_{27}\\ \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_0^0 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_1^0 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_2^0\\ \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_0^1 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_1^1 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_2^1\\ \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_0^2 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_1^2 & \mathbf{0}_{27} & \boldsymbol{g}_2^2\end{bmatrix}_{6\times 162}\tag{27}$$

表2　　应用于广义空间调制系统的训练序列参数对比情况

文献	序列形式	序列集个数	集内序列条数	序列长度	零相关区宽度
文献[11]	交叉Z互补对及其互补配对	2	2	2^nL	2^nZ
文献[13]	偶进制对称Z互补码集	8	2	2^m	$2^{m-2}-1$
文献[14]	偶进制增强型交叉Z互补集	2^k	2^v	2^m	$2^{\pi_1(1)-1}$
定理1	增强型交叉Z互补集	b^k	b^v	b^m	$(b-1)b^{\pi_1(1)-1}$

图3展示了多径数量$\lambda = 6$时，基于训练矩阵$\boldsymbol{\Psi}$的信道估计的均方误差性能。由于目前已知的增强型交叉Z互补集的构造方法中只有2的幂次形式，为了方便对比，除了对本文例1中生成的长度为27的增强型交叉Z互补集进行仿真外，也对与例1中的增强型交叉Z互补集有相同长度的其他类别序列集进行同等条件下的性能仿真，其中包括长度为27的完全互补码、Golay互补三联体、对称Z互补码集和随机序列。在具体的性能仿真时，只需要将上述训练矩阵$\boldsymbol{\Psi}$中的训练序列$\mathcal{G} = \{\boldsymbol{g}_0^0,\boldsymbol{g}_1^0,\boldsymbol{g}_2^0;\boldsymbol{g}_0^1,\boldsymbol{g}_1^1,\boldsymbol{g}_2^1;\boldsymbol{g}_0^2,\boldsymbol{g}_1^2,\boldsymbol{g}_2^2\}$分别替换为相同尺寸下的完全互补码$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{k}_0^0,\boldsymbol{k}_1^0,\boldsymbol{k}_2^0;\boldsymbol{k}_0^1,\boldsymbol{k}_1^1,\boldsymbol{k}_2^1;\boldsymbol{k}_0^2,\boldsymbol{k}_1^2,\boldsymbol{k}_2^2\}$、Golay互补三联体$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{c}_0;\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{c}_1;\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}_2\}$、对称Z互补码集$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{s}_0^0,\boldsymbol{s}_1^0,\boldsymbol{s}_2^0;\boldsymbol{s}_0^1,\boldsymbol{s}_1^1,\boldsymbol{s}_2^1;\boldsymbol{s}_0^2,\boldsymbol{s}_1^2,\boldsymbol{s}_2^2\}$和随机序列。

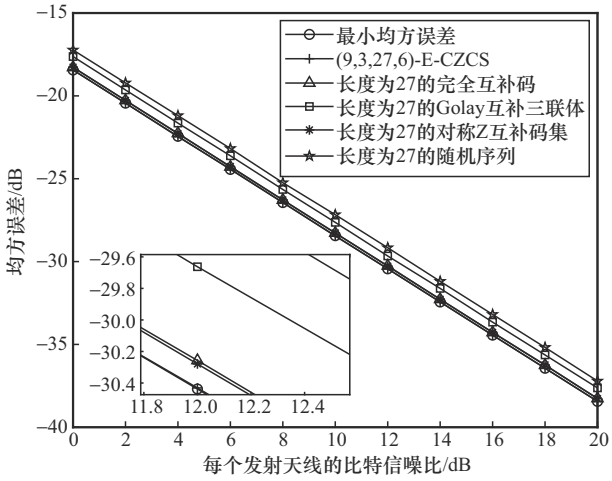


图3　不同比特信噪比下的均方误差性能

从图3可以看出，信道估计的均方误差性能随着信噪比的比特数变化而发生相应的变化，且增强型交叉Z互补集在不同比特信噪比下的均方误差均小于其他训练序列。同时，结果表明使用本文提出的(9,3,27,6)−增强型交叉Z互补集作为训练矩阵时，其均方误差性能与均方误差下界相匹配。

图4展示了在比特信噪比$\dfrac{E_{\mathrm{b}}}{N_0} = 16$ dB的条件下，不同多径数对均方误差性能的影响。仿真对比序列种类与图3中相同。结果表明，在多径数相同的情况下，使用本文提出的增强型交叉Z互补集的训练矩阵的均方误差小于使用其他类别训练序列时的均方误差。特别地，当多径数小于或等于7，即$\lambda = 6$时，均方误差性能达到最优，可以实现最小均方误差。

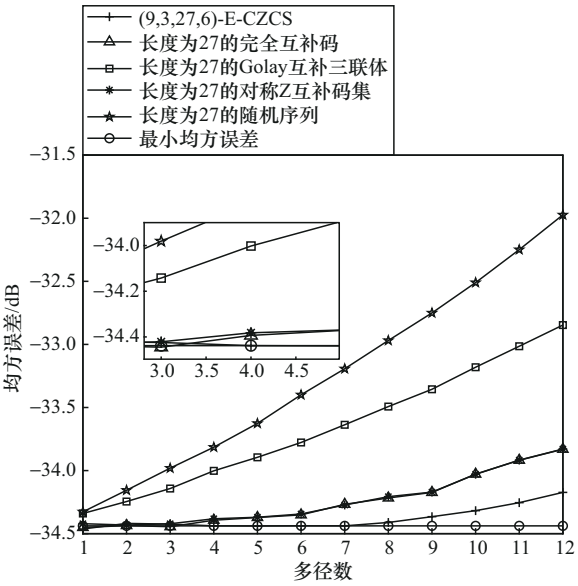


图4　不同多径数下的均方误差性能

5　结束语

本文基于扩展广义布尔函数，提出了一种直接构造参数为$(b^k,b^v,b^m,(b-1)b^{\pi_1(1)-1})$的增强型交叉Z互补集的方法，其中$b$为大于或等于2的正整数。得到的增强型交叉Z互补集在序列集个数、集内序列条数和序列长度方面均突破了已有研究必须为2的幂次形式的限制，解决了文献[14]中的开放难题，极大地扩展了增强型交叉Z互补集的存在空间。此外，将构造的增强型交叉Z互补集应用于广义空间调制的训练矩阵中，仿真结果表明，本文构造的增强型交叉Z互补集在不同比特信噪比和不同多径数下的均方误差性能均优于其他类别的训练序列，且在频率选择性信道中可实现最优的信道估计性能。

附录1　定理1证明

分3个部分证明$\mathcal{G}$满足式(3)和式(4)。$\Gamma_1 = \{1,2,\cdots,(b-1)b^{\pi_1(1)-1}\}$、$\Gamma_2 = \{b^m-(b-1)b^{\pi_1(1)-1},b^m-(b-1)b^{\pi_1(1)-1}+1,\cdots,b^m-1\}$以及$\Gamma = \{1,2,\cdots,b^m-1\}$。令$\boldsymbol{g}_n^r = (g_{n,0}^r,g_{n,1}^r,\cdots,g_{n,b^m-1}^r)$，其中$r = 0,1,\cdots,b^k-1$，$n = 0,1,\cdots,b^v-1$。设$(i_1,i_2,\cdots,i_m)$和$(j_1,j_2,\cdots,j_m)$分别是任意非负整数$i$和$j$的$b$元表示，且令$j = i+\tau$。

1) 对于$|\tau| \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，有

$$R(G^r;\tau) = \sum_{n=0}^{b^v-1} R(\omega_q^{\boldsymbol{g}_n^r};\tau) = \sum_{n=0}^{b^v-1}\sum_{i=0}^{b^m-\tau-1} \omega_q^{g_{n,i+\tau}^r-g_{n,i}^r} = \sum_{i=0}^{b^m-\tau-1}\sum_{n=0}^{b^v-1} \omega_q^{g_{n,i+\tau}^r-g_{n,i}^r} = 0 \tag{28}$$

当$v = k$时，有

$$g_n^r = f + \frac{q}{b}\left(\sum_{\alpha=1}^{k} n_{k-\alpha+1} x_{\pi_\alpha(1)} + \sum_{\alpha=1}^{k} r_\alpha x_{\pi_\alpha(m_\alpha)}\right) \tag{29}$$

根据引理 1 可知，$G^r \in \mathcal{G}$是 Golay 互补集。因此，当$|\tau| \in (1,2,\cdots,b^m-1)$时，始终有$R(G^r;\tau)=0$成立。

当$v<k$时，分别证明$|\tau| \in \Gamma_1$和$|\tau| \in \Gamma_2$在$i_{\pi_1(1)} \neq j_{\pi_1(1)}$和$i_{\pi_1(1)} = j_{\pi_1(1)}$这 2 种情况下，有

$$R(G^r;\tau) = \sum_{n=0}^{b^v-1} R(\omega_q^{\boldsymbol{g}_n^r};\tau) = 0 \tag{30}$$

情况 1　对于$|\tau| \in \Gamma_1$，分以下几种情况讨论。

情况1.1　当$i_{\pi_1(1)} \neq j_{\pi_1(1)}$时，存在$\boldsymbol{g}_{n^h}^r = (g_{n^h,0}^r, g_{n^h,1}^r, \cdots, g_{n^h,b^m-1}^r) = \boldsymbol{g}_n^r + (h\frac{q}{b}) x_{\pi_1(1)} \in G^r$，其中$1 \leqslant h \leqslant b-1$，使得

$$g_{n^h,i}^r - g_{n,i}^r = h\frac{q}{b} i_{\pi_1(1)} \tag{31}$$

$$g_{n^h,j}^r - g_{n,j}^r = h\frac{q}{b} j_{\pi_1(1)} \tag{32}$$

由式(31)和式(32)得

$$g_{n^h,i}^r - g_{n^h,j}^r - (g_{n,i}^r - g_{n,j}^r) = h\frac{q}{b}(i_{\pi_1(1)} - j_{\pi_1(1)}) \tag{33}$$

取单位q次方根的幂后对h求和后进一步得到

$$\omega_q^{(g_{n,i}^r - g_{n,j}^r)} + \sum_{h=1}^{b-1} \omega_q^{(g_{n^h,i}^r - g_{n^h,j}^r)} = 0 \tag{34}$$

因此，有

$$\sum_{n=0}^{b^v-1} \omega_q^{g_{n,j}^r - g_{n,i}^r} = 0 \tag{35}$$

情况 1.2　假设$i_{\pi_1(1)} = j_{\pi_1(1)}$，$i_{\pi_{v+\eta}(1)} = j_{\pi_{v+\eta}(1)}$，其中$\eta = 1,2,\cdots,k-v$。如果假设不成立，令$\alpha'$是满足$i_{\pi_{v+\alpha'}(1)} \neq j_{\pi_{v+\alpha'}(1)}$的最小整数，那么就可以得到$i_m = j_m, i_{m-1} = j_{m-1}, \cdots, i_{m-\alpha'+2} = j_{m-\alpha'+2}$。此时

$$\begin{aligned}\tau = j - i = b^{m-\alpha'} + \sum_{a=1, a\neq\pi_1(1)}^{m-\alpha'} (j_a - i_a) b^{a-1} \geqslant \\ b^{m-\alpha'} - \sum_{a=1, a\neq\pi_1(1)}^{m-\alpha'} (b-1) b^{a-1} + (b-1) b^{\pi_1(1)-1} = \\ (b-1) b^{\pi_1(1)-1} + 1\end{aligned} \tag{36}$$

此结果与$\tau \leqslant (b-1)b^{\pi_1(1)-1}$相矛盾，故假设成立。基于此，进一步分 2 种情形考虑情况 1.2。

情况 1.2.1　对于某些$\alpha \in \{2,3,\cdots,v\}$有$i_{\pi_\alpha(1)} \neq j_{\pi_\alpha(1)}$。与上述的情况 1.1 相似，同样存在$\boldsymbol{g}_{n^h}^r = (g_{n^h,0}^r, g_{n^h,1}^r, \cdots, g_{n^h,b^m-1}^r) = \boldsymbol{g}_n^r + (h\frac{q}{b}) x_{\pi_\alpha(1)} \in G^r$，其中$1 \leqslant h \leqslant b-1$，使得式(30)和式(31)成立。

情况 1.2.2　对于所有$\alpha \in \{1,2,\cdots,k\}$，都有$i_{\pi_\alpha(1)} = j_{\pi_\alpha(1)}$时。设$\alpha' \leqslant k$是一个对所有$\alpha = 1,2,\cdots,\alpha'-1$和$\beta = 1,2,\cdots,m_a$都满足$i_{\pi_\alpha(\beta)} = j_{\pi_\alpha(\beta)}$的整数，$\beta'$是满足$i_{\pi_{\alpha'}(\beta')} \neq j_{\pi_{\alpha'}(\beta')}$的最小整数。令$i^h$和$j^h$分别为仅在位置$\pi_{\alpha'}(\beta'-1)$上不同于$i$和$j$的整数，即$i^h_{\pi_{\alpha'}(\beta'-1)} = i_{\pi_{\alpha'}(\beta'-1)} - h$，$j^h_{\pi_{\alpha'}(\beta'-1)} = j_{\pi_{\alpha'}(\beta'-1)} - h$，其中$1 \leqslant h \leqslant b-1$。因为$j = i + \tau$，故有$j^h = i^h + \tau$。因此，根据式(24)可得

$$g_{n,i}^r - g_{n,i^h}^r = h\frac{q}{b}(d_{\alpha',\beta'-2} i_{\pi_{\alpha'}(\beta'-2)} + d_{\alpha',\beta'} i_{\pi_{\alpha'}(\beta')}) + h p_{\pi_{\alpha'}(\beta'-1)} \tag{37}$$

同理有

$$g_{n,j}^r - g_{n,j^h}^r = h\frac{q}{b}(d_{\alpha',\beta'-2} j_{\pi_{\alpha'}(\beta'-2)} + d_{\alpha',\beta'} j_{\pi_{\alpha'}(\beta')}) + h p_{\pi_{\alpha'}(\beta'-1)} \tag{38}$$

因为$i_{\pi_{\alpha'}(\beta'-2)} = j_{\pi_{\alpha'}(\beta'-2)}$，所以有

$$g_{n,i^h}^r - g_{n,j^h}^r - (g_{n,i}^r - g_{n,j}^r) = h\frac{q}{b} d_{\alpha',\beta'}(i_{\pi_{\alpha'}(\beta')} - j_{\pi_{\alpha'}(\beta')}) \tag{39}$$

又因为$d_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{U}(b)$，同样可以得到

$$\omega_q^{(g_{n,i}^r - g_{n,j}^r)} + \sum_{h=1}^{b-1} \omega_q^{(g_{n^h,i}^r - g_{n^h,j}^r)} = 0 \tag{40}$$

综合情况 1.1 和情况 1.2 可以证明当$|\tau| \in \Gamma_1$时，$R(G^r;\tau) = 0$。

情况 2　对于$|\tau| \in \Gamma_2$，有$i_{\pi_1(1)} \neq j_{\pi_1(1)}$。假设$i_{\pi_1(1)} = j_{\pi_1(1)}$，则可得

$$\tau = j - i = \sum_{a=1, a\neq\pi_1(1)}^{m} (j_a - i_a) b^{a-1} \leqslant b^m - (b-1) b^{\pi_1(1)-1} - 1 \tag{41}$$

此结果与已知条件$b^m - (b-1)b^{\pi_1(1)-1} \leqslant |\tau| \leqslant b^m - 1$相矛盾，假设不成立。故当$|\tau| \in \Gamma_2$，有$i_{\pi_1(1)} \neq j_{\pi_1(1)}$。与情况 1.1 类似，同样得到$\boldsymbol{g}_{n^h}^r = \boldsymbol{g}_n^r + (h\frac{q}{b}) x_{\pi_\alpha(1)} \in G^r$，其中$1 \leqslant h \leqslant b-1$，使得$|\tau| \in \Gamma_2$时，有

$$R(G^r;\tau) = \sum_{i=0}^{b^m-\tau-1} \sum_{n=0}^{b^v-1} \omega_q^{g_{n,i+\tau}^r - g_{n,i}^r} = 0 \tag{42}$$

2) 证明任意 2 个不同集合G^{r_1}和G^{r_2}对于$|\tau| \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$时的 ACCF 都为零，即

$$R(G^{r_1}, G^{r_2};\tau) = \sum_{n=0}^{b^v-1} R(\boldsymbol{g}_n^{r_1}, \boldsymbol{g}_n^{r_2};\tau) = \sum_{i=0}^{b^m-\tau-1} \sum_{n=0}^{b^v-1} \omega_q^{g_{n,i}^{r_1} - g_{n,i+\tau}^{r_2}} = 0 \tag{43}$$

与 1)类似，当$v = k$时，由引理 1 知G^{r_1}和G^{r_2}为相互正交的格雷互补集，即$|\tau| \in \{1,2,\cdots,b^m-1\}$时，总有$R(G^{r_1}, G^{r_2};\tau) = 0$。当$v < k$时，类似可得到$|\tau| \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$时，有

$$\sum_{n=0}^{b^v-1} R(g_n^{r_1}, g_n^{r_2};\tau) = 0 \tag{44}$$

现在只需要证明

$$R(G^{r_1}, G^{r_2};0) = \sum_{n=0}^{b^v-1} R(g_n^{r_1}, g_n^{r_2};0) = \sum_{n=0}^{b^v-1} \sum_{i=0}^{b^m-1} \omega_q^{g_{n,i}^{r_1} - g_{n,i}^{r_2}} = 0 \tag{45}$$

令$(r_{11}, r_{12}, \cdots, r_{1k})$和$(r_{21}, r_{22}, \cdots, r_{2k})$分别是$r_1$和$r_2$的$b$元表示，对于每个$\alpha \in \{1,2,\cdots,k\}$而言，$x_{\pi_\alpha(m_\alpha)}$正好将$\{0,1,\cdots,b-1\}$中每个值均匀地取$b^m-1$次，由此达到了一种平衡。又因为$c_\alpha \in \mathcal{U}(b)$，故对于$n = 0,1,\cdots,b^v-1$，有

$$\sum_{i=0}^{b^m-1} \omega_q^{g_{n,i}^{r_1} - g_{n,i}^{r_2}} = 0 \tag{46}$$

因此，式(45)成立。

3) 证明定义 3 中的式(4)，即对于 2 个不同的集合G^{r_1}和G^{r_2}，有

$$\begin{aligned}R^{\#}(G^{r_1}, G^{r_2};\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} R(g_n^{r_1}, g_{(n+1)\bmod N}^{r_2};\tau) = \\ \sum_{n=0}^{b^v-1} \sum_{i=0}^{b^m-\tau-1} \omega_q^{g_{n,i}^{r_1} - g_{(n+1)\bmod N,i+\tau}^{r_2}} = 0\end{aligned} \tag{47}$$

其中，$|\tau| \in \Gamma_2$，$N = b^v$。与 1)中的情况 2 类似，对于任意整数i，令$j = i + \tau$，则有$i_{\pi_1(1)} \neq j_{\pi_1(1)}$。$(n_1, n_2, \cdots, n_v)$和$(c_1, c_2, \cdots, c_v)$分别是$n$和$c = (n+1) \bmod N$的$b$元表示。设$n^h$

和c^h分别为仅在位置v处与n和c不同的整数，即$n_v^h = n_v - h$，$c_v^h = c_v - h$，其中$1 \leqslant h \leqslant b - 1$。与情况1.1类似，有

$$g_{n^h,i}^{r_1} - g_{n,i}^{r_1} = h\frac{q}{b} i_{\pi_1(1)} \tag{48}$$

$$g_{c^h,j}^{r_2} - g_{c,j}^{r_2} = h\frac{q}{b} j_{\pi_1(1)} \tag{49}$$

所以

$$g_{n^h,i}^{r_1} - g_{n,i}^{r_1} - (g_{c^h,j}^{r_2} - g_{c,j}^{r_2}) = h\frac{q}{b}(i_{\pi_1(1)} - j_{\pi_1(1)}) \tag{50}$$

又因为$i_{\pi_1(1)} \neq j_{\pi_1(1)}$，取单位$q$次方根的幂，然后对$h$求和得

$$\omega_q^{(g_{n,i}^{r_1} - g_{c,j}^{r_2})} + \sum_{h=1}^{b-1} \omega_q^{(g_{n^h,i}^{r_1} - g_{c^h,j}^{r_2})} = 0 \tag{51}$$

因此，有式(47)成立。

综合上述3个部分，定理1得证。证毕。

参考文献：

[1] GUO S S, ZHANG H X, ZHANG P, et al. Signal shaping for generalized spatial modulation and generalized quadrature spatial modulation[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2019, 18(8): 4047-4059.

[2] AL-NAHHAL M, BASAR E, UYSAL M. Flexible generalized spatial modulation for visible light communications[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2021, 70(1): 1041-1045.

[3] CHEN Y M, LIN K C, PENG Y H, et al. A low-complexity high-rate spatial multiplexing aided generalized spatial modulation scheme[C]// Proceedings of the 2021 IEEE 32nd Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC). Piscataway: IEEE Press, 2021: 434-439.

[4] ZHU F F, HAI H, PENG Y Y, et al. Extended variable active antenna generalized spatial modulation[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2024, 13(2): 265-269.

[5] RENZO M D, HAAS H, GRANT P M. Spatial modulation for multiple-antenna wireless systems: a survey[J]. IEEE Communications Magazine, 2011, 49(12): 182-191.

[6] WEN M W, ZHENG B X, KIM K J, et al. A survey on spatial modulation in emerging wireless systems: research progresses and applications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2019, 37(9): 1949-1972.

[7] YIN W J, KONG Z M, LIU Y S, et al. Artificial-noise-aided CQI-mapped generalized spatial modulation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2023, 72(4): 5338-5343.

[8] XU W Z, JHONG C H, LAI K C. Ordered block detector for single-carrier generalized spatial modulation in frequency-selective fading channels[J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(2): 691-695.

[9] SINGH K, MAKARIM A F, ALBINSAID H, et al. Passive beamforming design and DNN-based signal detection in RIS-assisted MIMO systems with generalized spatial modulation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2023, 72(2): 1879-1892.

[10] ADHIKARY A R, ZHOU Z C, YANG Y, et al. Constructions of cross Z-complementary pairs with new lengths[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 4700-4712.

[11] HUANG Z M, HU C, LIU Z L, et al. On the mates of cross Z-complementary pairs for training sequence design in generalized spatial modulation[J]. IEEE Access, 2023, 11: 145231-145237.

[12] HUANG Z M, PAI C Y, CHEN C Y. A novel construction of optimal cross Z-complementary sets based on generalized Boolean functions[C]// Proceedings of the 2022 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2022: 1725-1730.

[13] ZHOU Y J, ZHOU Z C, LIU Z L, et al. Symmetrical Z-complementary code sets for optimal training in generalized spatial modulation[C]// Proceedings of the 2022 10th International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA). Piscataway: IEEE Press, 2022: 1-5.

[14] HUANG Z M, PAI C Y, LIU Z L, et al. Enhanced cross Z-complementary set and its application in generalized spatial modulation[J]. IEEE Open Journal of the Communications Society, 2024, 5: 4674-4690.

[15] HUANG Z M, PAI C Y, CHEN C Y. Cross Z-complementary sets for training design in spatial modulation[J]. IEEE Transactions on Communications, 2022, 70(8): 5030-5045.

[16] KUMAR P, MAJHI S, PAUL S. A direct construction of golay complementary pairs and binary complete complementary codes of length non-power of two[J]. IEEE Transactions on Communications, 2023, 71(3): 1352-1363.

[17] ZHOU Z C, ZHANG D, HELLESETH T, et al. A construction of multiple optimal ZCZ sequence sets with good cross correlation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64(2): 1340-1346.

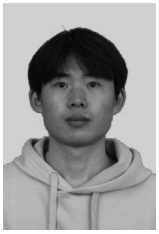
[18] PAI C Y, LIN Y J, CHEN C Y. Optimal and almost-optimal golay-ZCZ sequence sets with bounded PAPRs[J]. IEEE Transactions on Communications, 2023, 71(2): 728-740.

[19] MEN X Y, LI Y B. New construction of multiple complete complementary codes with inter-set zero cross-correlation zone[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2022, 29: 1958-1962.

[作者简介]

彭秀平（1984－），女，安徽安庆人，博士，燕山大学教授，主要研究方向为无线通信信号波形设计、通感一体化波形设计、组合设计编码、Zak变换技术等。

刘银娜（1998－），女，河北保定人，燕山大学硕士生，主要研究方向为互补序列设计与编码理论。



王毓（1998－），男，山西大同人，燕山大学硕士生，主要研究方向为互补序列设计与编码理论。

牛晓霞（1981－），女，河北保定人，燕山大学高级实验师，主要研究方向为图像信息处理、三维建模等。